

文章编号: 1000-7598-(2004) 04-0671-04

无网格自然单元法在弹塑性分析中的应用

朱合华^{1, 2}, 杨宝红¹, 蔡永昌¹, 徐 斌¹

(1. 同济大学 土木工程学院地下建筑与工程系, 上海 200092;

2. 重庆大学 西南资源开发及环境灾害控制工程教育部重点实验室, 重庆 400045)

摘 要: 无网格自然单元法在构造位移插值函数时不需要单元的信息, 只需要结点的信息, 在裂纹扩展模拟、材料非线性分析、几何非线性分析以及三维计算等方面具有广阔的应用前景。阐述了将无网格自然单元法应用于结构弹塑性分析的过程和基本理论, 给出了其位移插值函数的构造过程, 并将其结果与常规的有限单元法进行对比, 证明了该方法用于弹塑性分析的优越性。

关 键 词: 无网格; 自然单元; 弹塑性分析

中图分类号: TB 114.1 **文献标识码:** A

Application of meshless natural element method to elastoplastic analysis

ZHU He-hua^{1, 2}, YANG Bao-hong¹, CAI Yong-chang¹, XU Bin¹

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory for the Exploitation on Southwestern Resources & the Environmental Disaster Control Engineering, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: The meshless natural element method(NEM) requires only nodes and a description of the external and internal boundaries, and no element connectivity is needed totally or partly. Therefore, meshless natural element method can be widely applied to crack propagation problems, elastoplastic analysis of materials and large deformation problems. Based on the summarization of the present literatures, the nature element method, which possesses the characters and advantages of the traditional finite element method and other meshless methods, has been studied further. And its application to elastoplastic problems is proposed and the basic principles of meshless natural element method are presented too. Finally, some special problems are given to verify the program designed according to the principles.

Key words: meshless; natural element; elastoplastic analysis

1 引 言

无网格自然单元法是近年来发展起来的一种数值计算方法, 它有效地利用了理论成熟的 Delaunay 全自动三角化技术, 使三角形网格的求解精度得到了很大的提高(相当于有限元四结点或八结点单元), 且保留了无网格方法前处理简单的特点, 因而目前已经在较多的领域得到了应用^[1~5], 但总的来说, 其应用主要还是针对线弹性问题, 在弹塑性问题中的应用较少。本文尝试无网格自然单元法的弹塑性应用, 将无网格自然单元法与弹塑性分析理论相结合, 并以 Visual C++为开发工具^[1], 在同济曙光®图形平台的基础上利用面向对象的程序

设计方法, 开发了以无网格自然单元法(NEM)为基础, 采用增量的初应力法的弹塑性计算程序。

2 自然邻接形函数的构造及其性质

Delaunay 三角化的空圆准则: 通过 Delaunay 三角形 3 个顶点的外接圆里不包含其他结点。

Voronoi 结构的定义: 到结点 x_i 的距离小于到其他任何结点 x_j 的距离的区域的集合。其数学表达为

$$T_i = \{x \in R^2 : d(x, x_i) < d(x, x_j) \forall j \neq i\} \quad (1)$$

其中 $d(x, x_j)$ 是结点 x 到 x_j 的距离。

2.1 自然邻接形函数的构造

Voronoi 结构与 Delaunay 三角形互为对偶。对

收稿日期: 2003-07-08

基金项目: 上海市重点学科(岩土工程)资助; 高等学校重点实验室访问学者基金资助

作者简介: 朱合华, 男, 1962 年生, 工学博士, 现为同济大学教授、博士生导师。主要从事地下结构设计理论的研究和岩土力学数值分析工作。

于任意一个二维空间 Ω , 先按照一定的规则布置离散的计算点^[6], 再按照 Delaunay 三角化的空圆准则全自动完成区域离散点的 Delaunay 三角形网格化, 并根据三角化网格建立区域 Ω 的 Voronoi 结构, 则区域内任意点 x 的插值函数为

$$\Phi_i(x) = A_i(x) / A(x) \quad (2)$$

式中 $A_i(x)$ 为结点 x_i 与点 x 的 Voronoi 结构的重叠部分的面积; $A(x)$ 为点 x 的 Voronoi 结构的面积。

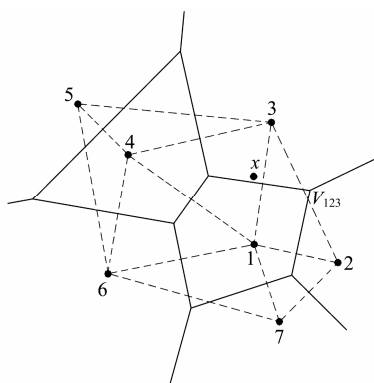


图1 Voronoi 图和 Delaunay 三角划分
Fig.1 Voronoi cells and Delaunay triangle

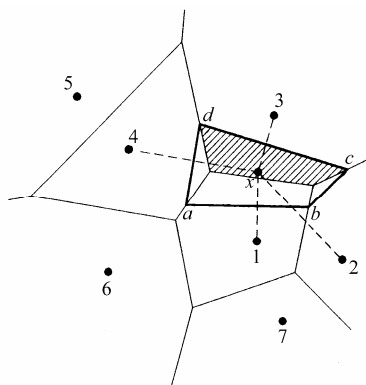


图2 点 x 的一阶和二阶 Voronoi 结构
Fig. 2 1st-order and 2nd-order Voronoi cells about x

为求得该插值函数, 首先用 Delaunay 三角化的空圆准则求点 x 周围的自然邻接点: 如果 Delaunay 三角形 Δ_i (如 Δ_{123}) 的外接圆圆心 Δ_i (如 V_{123}) 到点 x 的距离 d 小于 Δ_i 外接圆半径 R , 则 Δ_i 为点 x 的邻接三角形, 其结点 (如 1, 2, 3) 为点 x 的自然邻接点, 即

$$\|V_i - x\|^2 < R^2 \quad (3)$$

从点 x 到它的自然邻接点连线的垂直平分线构成了点 x 的 Voronoi 结构 T_x (如: 封闭多边形 $abcd$)。

设点 x 的邻接三角形 Δ_i 的局部结点编号为 $(I, J, K) = 1, 2, 3$, 作点 x 和 Δ_{123} 的局部结点 J, K 的外接圆, 并记其圆心为 $C_i(x) = \Theta(a_j, a_k, x)$ 。则 $\{C_1(x), C_2(x), V_i\}$, $\{C_2(x), C_3(x), V_i\}$, $\{C_3(x), C_1(x), V_i\}$ 为 3 个新的子三角形, 其面积记为

$$a_{i\Delta_i}(x) = A(C_i(x), C_K(x), V_i) \quad (4)$$

设局部结点 I 对应整体结点编号 i , 则可求得 Voronoi 结构的面积为

$$A_i(x) = A_i(x) + a_{i\Delta_i}(x) \quad (5)$$

对点 x 所有自然邻接点 $i = 1, 2, \dots, n$ 求和, 可得

$$A(x) = \sum_{i=1}^n A_i(x) \quad (6)$$

将式 (5) 和 (6) 代入式 (2) 即可求得点 x 的形函数 $\Phi_i(x)$ 。同理可以求出形函数的导数 $\Phi_{i,j}(x)$ 。

2.2 自然邻接形函数的性质

由式 (2) 自然邻接形函数的定义不难证明:

$$0 \leq \Phi(x) \leq 1 \quad (7)$$

由图 2 我们可以看到, 如果点 x 与任何结点重合, 比如点 x 与结点 1 重合, 则可以得到: $\Phi_1(x) = 1$, $\Phi_i(x) = 0 (i \neq 1)$ 。因此与有限元的形函数^[7]一样, 自然邻接形函数满足 Kronecker 条件:

$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (8)$$

也就是说自然邻接点近似位移函数在结点上与结点的位移值精确相等, 这意味着与其他无网格方法的近似位移函数 (如 MLS 近似) 不同, 用自然邻接近似函数可以准确地施加本质边界条件。

与有限单元法一样, 自然邻接形函数还满足单位分解条件和线性连续条件:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i(x) = 1, \quad x \in \Omega \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i(x) x_i = x \quad (10)$$

3 弹塑性问题的增量法^[8~10]

弹塑性材料在进入塑性状态后, 继续加载时的应力应变关系为

$$\{d\sigma\} = [D]_{ep} \{d\varepsilon\} \quad (11)$$

此关系是非线性的。为了使非线性问题转化为线性, 可以采取逐步增加荷载的方法。在一定的应力和应变水平上增加一次荷载, 将产生应力增量 $\{\Delta\sigma\}$ 和应变增量 $\{\Delta\varepsilon\}$ 。只要增加的荷载适当地小, 可将式 (11) 近似地表示为

$$\{\Delta\sigma\}=[D]_{ep}\{\Delta\varepsilon\} \quad (12)$$

式中 $[D]_{ep}$ 为弹塑性矩阵, $[D]_{ep}=[D]_e-[D]_p$ 。它仅是加载时的应力水平的函数, 因此式(12)是线性关系式。

弹塑性问题常用的解法有增量的变刚度法、增量初应力法和增量初应变法。由于无网格自然单元法计算位移插值函数以及形成总体刚度矩阵的时间较传统的有限单元法长, 为了避免了每次迭代都要形成和分解总体刚度矩阵, 本文采用增量的初应力法。这样, 只要在计算开始形成并分解总体刚度矩阵, 以后各增量段以及各增量段内的各次迭代中分解好的总体刚度矩阵均不改变。以下将阐述无网格自然单元法总体刚度矩阵的形成。

4 自然单元法总体平衡方程的构造

由自然邻接近似位移函数表达式, 可以按有限元法同样的步骤^[7], 利用最小势能原理或 Galerkin 法直接得到离散求解的控制平衡方程。

设弹性体域 Ω , 力边界 Γ_l , 位移边界 Γ_u , 则平衡方程为

$$\sigma_{ij,j}+\bar{f}_i=0, \text{ 在 } \Omega \text{ 内} \quad (13)$$

$$\sigma_{ij}n_j-\bar{t}_i=0, \text{ 在 } \Gamma_l \text{ 上} \quad (14)$$

$$u_i=\bar{u}_i, \text{ 在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (15)$$

式中 σ_{ij} 为应力张量; $\bar{f}_i$ 为体力; $\bar{t}_i$ 为面力; $\bar{u}_i$ 为边界位移; n_j 为边界法向单位向量。

对于平面问题由变分原理即平衡位移使总势能取驻值可以得到系统的整体离散方程:

$$K \cdot u = f \quad (16)$$

对于线弹性问题, 有

$$K_{IJ}=\int_{\Omega} B_I^T D B_J d\Omega \quad (17)$$

$$f_I=\int_{\Gamma_l} \Phi_I t d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_I f_b d\Omega \quad (18)$$

式中 D 是平面问题的弹性矩阵; t 为面力; f_b 为体力。

对于弹塑性问题, 有

$$K_{IJ}=\int_{\Omega} B_I^T D_{ep} B_J d\Omega \quad (19)$$

式中 $[D]_{ep}$ 为应力计算点所对应的弹塑性矩阵, $[D]_{ep}=[D]_e-[D]_p$, $[D]_p$ 为塑性矩阵; $[B]$ 为对应积分点上的应变矩阵, 其表达式如下:

$$B_I=\begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y} \\ \Phi_{I,y} & \Phi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

平面应力和平面应变条件下塑性矩阵的显式表达式如下。

平面应力:

$$[D]_p=\frac{E}{Q(1-\mu^2)}\begin{bmatrix} A^2 & AB & A(1-\mu)\tau_{xy} \\ B^2 & B(1-\mu)\tau_{xy} \\ (1-\mu)\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中 $Q=S_x^2+S_y^2+2\mu S_x S_y+2(1-\mu)\tau_{xy}^2+$

$$\frac{4(1-\mu^2)\sigma_i^2 H'}{9E}; \quad A=S_x+\mu S_y; \quad B=\mu S_x+S_y。$$

平面应变:

$$[D]_p=\frac{9G^2}{(H'+3G)\sigma_i^2}\begin{bmatrix} S_x^2 & S_x S_y & S_x \tau_{xy} \\ S_y^2 & S_y \tau_{xy} \\ \tau_{xy}^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

因为无网格自然单元法中没有单元的概念, 所以上式中刚度矩阵 K_{ij} 的计算是以结点为基础, 在背景网格上积分而来的。本文直接采用结构的 Delaunay 三角形网格作为背景积分网格。

5 算例

5.1 厚壁圆筒算例

一轴向受到约束的承受内压的厚壁圆筒, 内径 $a=10$ mm, 外径 $b=20$ mm, 内压力 $p=12$ kPa, 材料是理想弹塑性, 弹性模量 $E=85\,570$ kPa, 泊松比 $\mu=0.3$, 材料拉伸屈服极限 $\sigma_s=17.32$ kPa, 采用 V-Mises 屈服准则。我们利用同济曙光®软件的网格自动生成器在求解域类布点 292 个, 生成三角形网格 515 个。与理论值、三角形网格有限元值的自然单元法计算值。比较结果如图 3~5。由图 4 和图 5 的比较可以看出, 在同样计算结点的情况下, 自然单元法的弹塑性计算结果与理论解符合得较好, 而三角形有限单元法的计算结果却与理论解有较大的差距。

5.2 悬臂梁算例

一矩形悬臂梁, 长 $l=40$ m, 高 $h=10$ m, 一端固定, 另一端受集中荷载 $p=-11$ kPa。材料取为理想弹塑性体, 服从 Von-Mises 屈服准则。材料参数如下: 矩形 $E=86\,670$ kPa, $\mu=0.3$, $\sigma_s=17.32$ kPa。分别采用三角形有限单元法、四边形有限单元法和自然单元法进行计算, 其中三角形单元的网格与自然单元的积分网格相同。计算结果如图 6~7 所示。

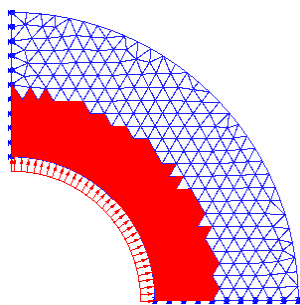


图3 计算模型与塑性区

Fig.3 The computation model and plastic zone

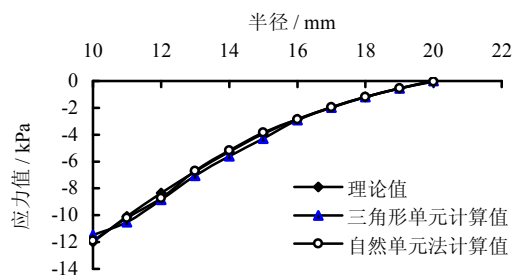


图4 法向应力比较

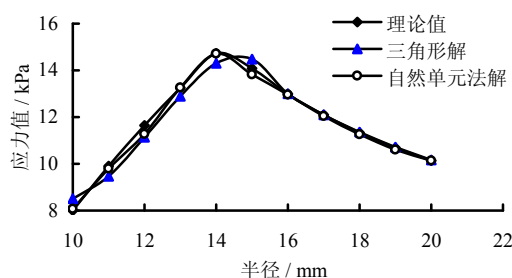
Fig.4 The comparison of stresses σ_r 

图5 切向应力比较

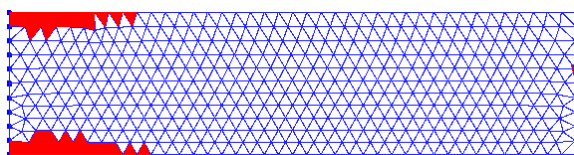
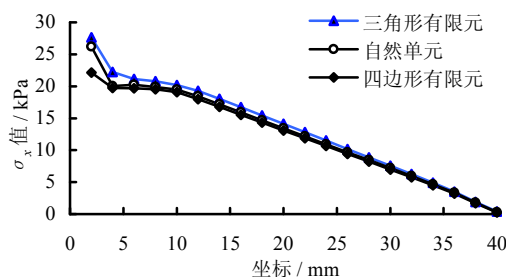
Fig.5 The comparison of stress σ_θ 

图6 悬臂梁网格及塑性区

Fig.6 The triangular mesh and plastic zone of the cantilever beam

图7 悬臂梁正应力 σ_x 的比较Fig.7 The comparison of normal stresses σ_x of the cantilever beam

6 结语

自然单元法利用需求解点的自然邻结点、Voronoi 结构和无网格的方式来构造整体求解的近似位移函数,在保证计算精度的前提下简化了数值计算的前处理过程。本文将弹塑性分析中增量的初应力法与无网格自然单元法相结合,编制了通用的 C++ 程序,并用于结构的弹塑性计算,计算中我们采用了理想弹塑性模型, Von-Mises 屈服准则。计算实例表明:基于无网格自然单元法的增量初应力法,其计算精度比三结有限单元法高,基本上等同于四结有限单元法的计算精度,但与四结有限单元法相比,它更便于计算的前处理工作,具有良好的应用前景。

参考文献

- [1] Sukumar N, Moran, Belytschko T. The nature element method in solid mechanics[J]. *Int J Num Meth Eng*, 1998, (43): 839—887.
- [2] Braun J, Sambridge M. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids[J]. *Nature*, 1995, 376: 655—660.
- [3] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element free Galerkin methods[J]. *Int. J. Numer. Methods. Engrg*. 1994, (37): 229—256.
- [4] 蔡永昌, 李晓军, 朱合华. 基于局部 Petrov- Galerkin 过程的自然单元法及其面向对象的设计与实现[J]. *岩石力学与工程学报*, 2003, 22(8): 1 263—1 268.
- [5] 蔡永昌, 朱合华, 王建华. 基于 Voronoi 结构的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法[J]. *力学学报*, 2003, 35(2): 187—193.
- [6] 蔡永昌, 朱合华. 岩土工程数值计算中的无网格方法及其全自动布点技术[J]. *岩土力学*, 2003, 24(1): 21—24.
- [7] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理与数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [8] 孙钧, 汪炳监. 地下结构有限元法解析[M]. 上海: 同济大学出版社, 1988.
- [9] 夏志皋, 江理平. 弹性力学及其数值方法[M]. 上海: 同济大学出版社, 1997.
- [10] 夏志皋. 塑性力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1991.
- [11] Stanley B.Lippman, Josee Lajoie. C++ Primer [M]. [s.l]: Addison Wesley Longman, Inc, 2001.